



Zadanie 1.1

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $|AB| = |CD| = |EF|$ i $|BC| = |DE| = |FA|$. Ponadto $\sphericalangle FAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EFA = 240^\circ$. Wykaż, że $\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = 240^\circ$.

Zadanie 1.2

Znajdź wszystkie liczby całkowite x , które spełniają równanie:

$$(4-x)^{4-x} + (5-x)^{5-x} + 10 = 4^x + 5^x$$

Zadanie 1.3

Wykaż, że w dowolnym zbiorze $n+2$ liczb całkowitych dodatnich istnieją dwie takie liczby, że ich suma lub różnica jest podzielna przez $2n$.

Zadanie 1.4

Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 1$ oraz $a_n = n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ dla $n > 1$. Wykaż, że dla każdego parzystego k mamy $k! | a_k$.

Zadanie 1.5

Półprosta poprowadzona z wierzchołka A trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie X a okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Y . Wykaż, że $\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{4}{|BC|}$.

Zadanie 1.6

Na tablicy napisano pewien skończony ciąg, którego każdy wyraz jest równy 1, 2 albo 3. Liczba jedynek na miejscach parzystych jest taka sama, jak na nieparzystych; podobnie jak dwójek i trójek. W danym momencie możemy wykonać jedną z dwóch operacji:

- Jeśli trzy kolejne wyrazy x, y, z są parami różne, to można je zastąpić przez z, y, x ,
- Jeśli dwa kolejne wyrazy są równe, to można je zmazać.

Wykaż, że stosując te operacje, możemy całkowicie wymazać wyjściowy ciąg.

Zadanie 1.7

Dany jest skończony, niestały ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_1, a_2, \dots, a_n) , gdzie $n \geq 2$ taki, że $NWD(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Wykaż, że istnieją takie dwa wyrazy tego ciągu, że ich średnia arytmetyczna nie jest równa średniej geometrycznej dowolnego podzbioru wyrazów tego ciągu.

Rozwiązania powyższych zadań należy wysłać na adres mailowy:

konkursmatematyczny1lo@gmail.com

najpóźniej ostatniego dnia miesiąca.

Rozwiązanie każdego z zadań powinno być w jednym, oddzielnym pliku formatu pdf o nazwie $X.Y_NazwiskoI.pdf$, gdzie $X.Y$ to seria i numer zadania, a $NazwiskoI$ to nazwisko i pierwsza litera imienia uczestnika, bez polskich znaków, na

przykład *1.7_KopecK.pdf*, *2.3_NowakJ.pdf*.

Na początku każdej pracy należy umieścić: imię, nazwisko, klasę, szkołę i numer zadania. Strony powinny być ponumerowane.

Przed wysłaniem zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na stronie internetowej liga.kosciuszko.pl, a w razie pytań kontaktować się mailowo za pomocą adresu konkursmatematyczny1lo@gmail.com