Wygląd publikacji podsumowującej zeszłoroczną edycję. Poniżej znajdują się przykładowe zadania i rozwiązania zamieszczone w broszurze.

Zadanie 16

Liczby x, y mają odpowiednio 99 i 101 naturalnych dodatnich dzielników, wliczając w to 1 i x czy y. Czy możliwe jest, żeby ich iloczyn miał dokładnie 2020 dzielników?

Zadanie 17

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach a, b, c wiedząc, że jego pole jest równe $\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$.

Zadanie 18

Punkt M jest środkiem boku AB w trójkącie ABC. Na odcinku CM dany jest taki punkt D, że $|AC| = |BD|$. Wykaż, że $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MDB$.

Zadanie 19

Rozwiąż układ równań w liczbach całkowitych nieujemnych:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{z}=7 \\ \sqrt{x+z}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{x}=5 \end{cases}$$

Zadanie 20

Kasia ma trzy córki. Każda z jej córek ma dwie własne córki. Każda z sześciu wnuczek Kasi ma jedną córkę. Na ile sposobów można wybrać zbiór kobiet z opisanej wcześniej rodziny Kasi tak, aby nie znalazła się w nim żadna para matka-córka. (Wliczając w to zbiór pusty.)

Zadanie 21

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

$$x^2+\frac{1}{x^2-x+1} \geq x+1$$

Zadanie 16

Sposób I: Zauważmy, że liczba n o rozkładzie na czynniki pierwsze równym $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ma dokładnie $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ dzielników. Jest to znany fakt, którego dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Na mocy powyższego faktu rozważane liczby mające 99 i 101 dzielników są kwadratami liczb całkowitych. Istotnie, każdy z wyrazów $(\alpha_i + 1)$ musi być nieparzysty, zatem każda z liczb α_i jest parzysta. Zatem ich iloczyn również jest kwadratem liczby całkowitej. Stąd liczba jego dzielników jest nieparzysta, zatem w szczególności nie może wynosić 2020.

Sposób II: (A. Pietrasz) Na mocy faktu ze sposobu I możemy zapisać:

$$x, y = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Zatem ponieważ jedyne przedstawienia liczby 99 jako iloczyn liczb całkowitych większych od 1 to $11 \cdot 3 \cdot 3$, $11 \cdot 9$, $33 \cdot 3$ oraz 99 oraz jedyne takie przedstawienie liczby 101 to 101 możemy zapisać:

$$x = p_1^{98} \text{ lub } p_1^{32}p_2^2 \text{ lub } p_1^{10}p_2^8 \text{ lub } p_1^{10}p_2^2p_3^2$$

dla pewnych parami różnych liczb pierwszych p_1, p_2, p_3 oraz $y = q^{100}$ dla pewnej liczby pierwszej.

Teraz jeśli liczby q, p_1, p_2, p_3 są parami różne to liczba xy ma, niezależnie od przedstawienia liczby x, $99 \cdot 101 = 9999 \neq 2020$ dzielników. Rozważając przypadki $q = p_1, q = p_2$, $q = p_3$ oraz odpowiednie przedstawienia dochodzimy do wniosku, że ich iloczyn nie może mieć 2020 dzielników.

Zadanie 17

Sposób I: (M. Sosnowski) Wiemy, że pole trójkąta o bokach a, b i kącie γ między nimi jest równe $\frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma$. Musi być zatem:

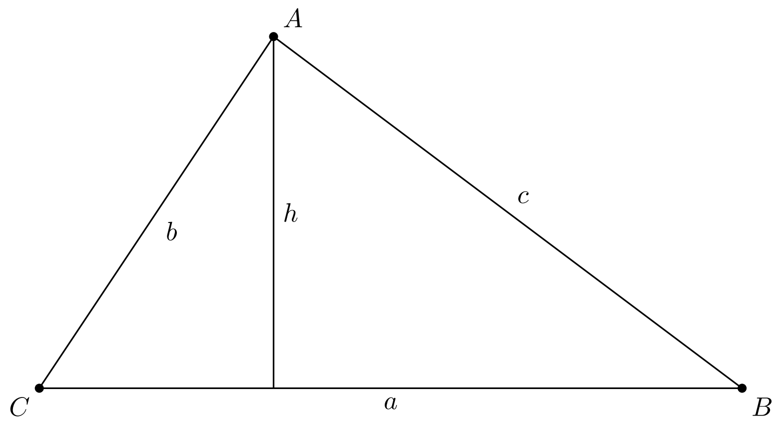
$$\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right) = \frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma \tag{$*$}$$

jednakże $\sin x \leq 1$, zatem $\frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma \leq \frac{1}{2} \cdot ab$. Stąd:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right) &\leq \frac{1}{2} \cdot ab \\ a^2+b^2 &\leq 2ab \\ (a-b)^2 &\leq 0\end{aligned}$$

Zatem musi być $a = b$. Podstawiając tę informację do $(*)$ mamy $\sin\gamma = 1$, czyli γ jest kątem prostym. Jedyne możliwe miary kątów trójkąta prostokątnego równoramiennego to $90°, 45°, 45°$, zatem są to szukane wartości.

Sposób II: Najpierw zauważmy, że $\frac{1}{4}(a^2+b^2) \geq \frac{1}{2} \cdot ab$. Istotnie, mnożąc tę nierówność obustronnie przez 4 otrzymujemy $a^2 + b^2 \geq 2ab$, skąd $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$. Ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.



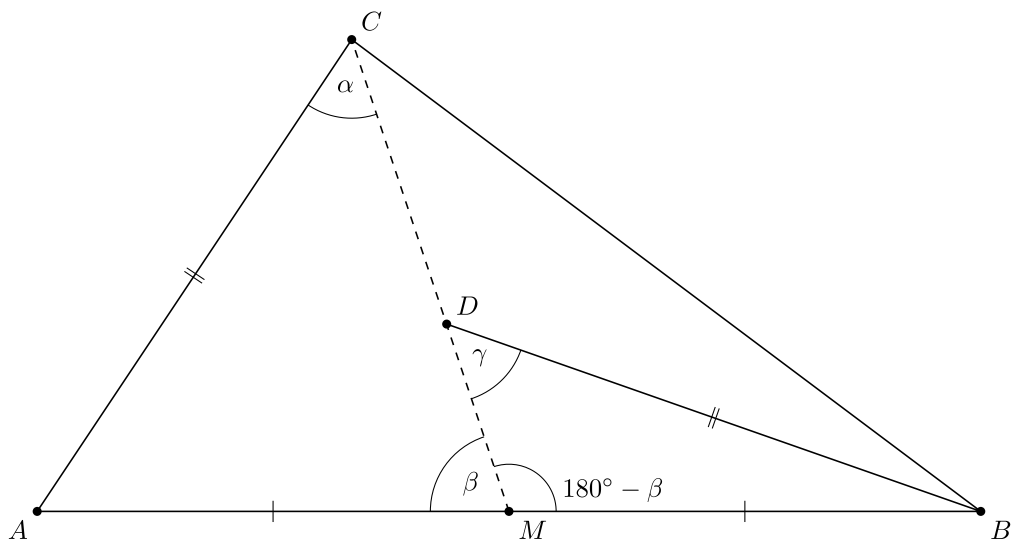
Niech P będzie rozważanym polem, a h wysokością opuszczoną z wierzchołka A na bok BC o długości a. Oczywiście $h \leq b$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy kąt ACB jest prosty. Dalej zapiszmy:

$$P = \frac{1}{2} \cdot ah \leq \frac{1}{2} \cdot ab \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

Zatem aby zachodziły warunki zadania obie nierówności muszą stać się równościami. Zatem w szczególności $\frac{1}{2} \cdot ah = \frac{1}{2} \cdot ab$, czyli $b = h$, skąd wiemy, że kąt ACB jest prosty. Ponadto $\frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, czyli $a = b$, zatem jest to trójkąt równoramienny. Jedyne możliwe miary kątów trójkąta prostokątnego równoramiennego to $90°, 45°, 45°$, zatem są to szukane wartości.

<u>Zadanie 18</u>

Sposób I: (M. Sosnowski) Przyjmijmy oznaczenia jak na poniższym rysunku. Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ACM mamy $\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AM|}{\sin\alpha}$ oraz z twierdzenia sinusów dla trójkąta BDM mamy $\frac{|BD|}{\sin(180°-\beta)} = \frac{|BM|}{\sin\gamma}$.



Jednakże $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$ oraz $|AC| = |BD|$, zatem:

$$\frac{|AM|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|BD|}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{|BM|}{\sin\gamma}$$

dalej $|AM| = |BM|$, zatem $\sin\alpha = \sin\gamma$. Stąd $\alpha = \gamma$ lub $\gamma = 180^\circ - \alpha$.

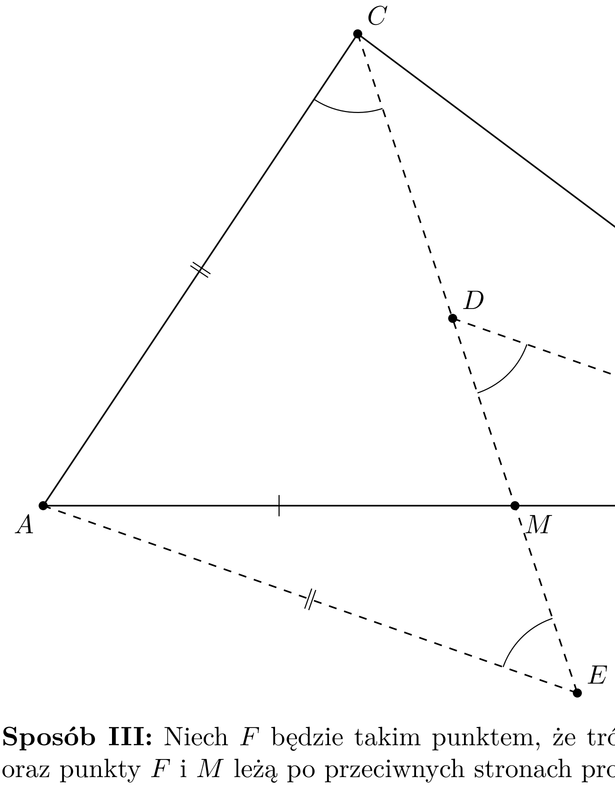
Jednak jeśli $\gamma = 180^\circ - \alpha$ to miary kątów w trójkącie DMB są równe:

$$\gamma + (180^\circ - \beta) + \sphericalangle MBD = 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + \sphericalangle MBD = 180^\circ$$

czyli $\alpha + \beta - \sphericalangle MBD = 180^\circ$. Dalej z sumy kątów w trójkącie CMA mamy $\alpha + \beta + \sphericalangle MAC = 180^\circ$. Łącząc te dwie równości mamy $\sphericalangle MAC = -\sphericalangle MBD$, co nie ma sensu geometrycznego, zatem ten przypadek nie zachodzi. Zatem $\alpha = \gamma$, co kończy dowód.

Sposób II: Oznaczmy przez E punkt symetryczny do punktu D względem punktu M. Wtedy środki przekątnych czworokąta $AEBD$ pokrywają się, więc jest to równoległobok.

Zatem zachodzą równości $|AE| = |BD| = |AC|$, czyli trójkąt ACE jest równoramienny. Stąd $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MEA$ jako kąty w trójkącie równoramiennym oraz $\sphericalangle MEA = \sphericalangle MDB$, gdyż proste BD oraz AE są równoległe jako przeciwległe boki równoległoboku. Łącząc te dwie równości otrzymujemy tezę.

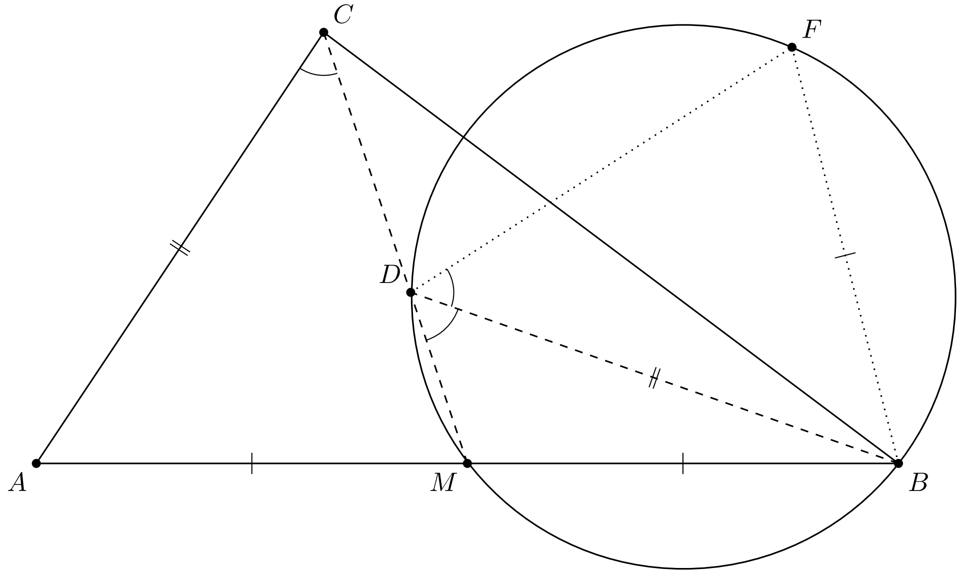


Sposób III: Niech F będzie takim punktem, że trójkąty AMC i BFD są przystające oraz punkty F i M leżą po przeciwnych stronach prostej BD. Z równości:

$$\sphericalangle BMD + \sphericalangle BFD = \sphericalangle BMD + \sphericalangle AMC = 180^\circ$$

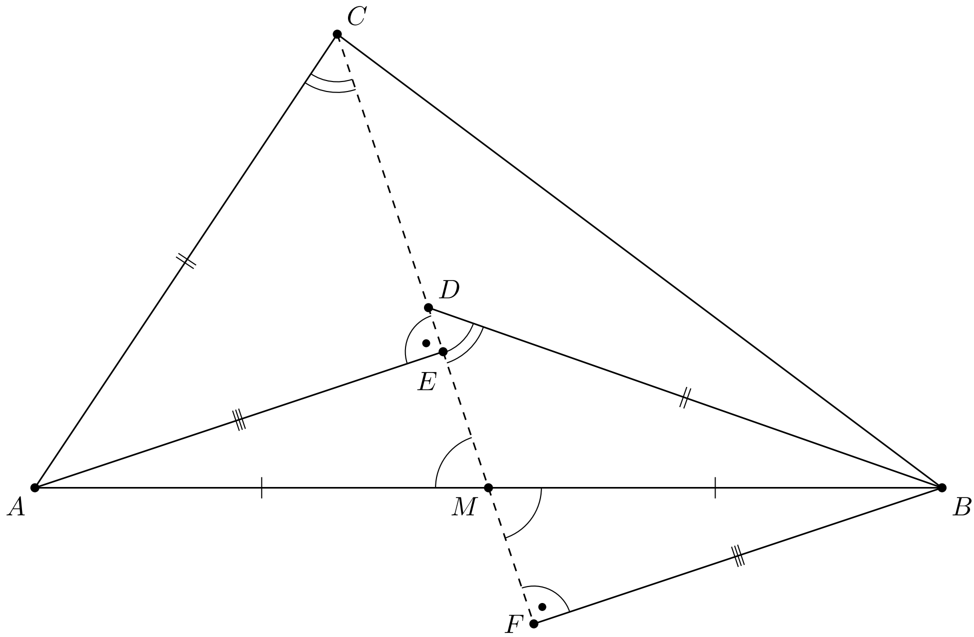
wynika, że na czworokącie $BFDM$ można opisać okrąg. Kąty $\sphericalangle MDB$ i $\sphericalangle BFD$ są wpisane w ten okrąg i oparte na cięciwach równej długości, a co za tym idzie i na łukach równej długości, zatem mają równe miary. Stąd $\sphericalangle MDB = \sphericalangle FDB$.

Ostatecznie, z założenia o przystawaniu trójkątów mamy $\sphericalangle FDB = \sphericalangle MCA$. Łącząc te dwie równości otrzymujemy tezę.



Sposób IV: (A. Pietrasz) Niech E będzie rzutem prostokątnym punktu A na prostą CM, a F rzutem prostokątnym punktu B na prostą CM. Mamy $\sphericalangle EMA = \sphericalangle BMF$ jako kąty wierzchołkowe. Ponadto $\sphericalangle AEM = \sphericalangle BFM = 90°$ z założenia. Zatem trójkąty AME i BM są podobne. Ponadto mają one odpowiedni bok równej długości - $|AM| = |BM|$ z założenia, zatem są przystające. Stąd również $|AE| = |BF|$.

Dalej, trójkąty prostokątne (z zał.) AEC i BFD mają dwa boki równe ($|AE| = |BF|$, $|AC| = |BD|$) zatem na mocy tw. Pitagorasa trzeci bok również jest równy. Zatem z cechy podobieństwa bok-kąt-bok są przystające, czyli $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MDB$.



Zadanie 19
Sposób I: Przyrównajmy pierwsze równanie do drugiego:

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{z}=\sqrt{x+z}+\sqrt{y}$$

Podnosząc obie strony do kwadratu mamy:

$$\begin{aligned} x+y+2\sqrt{z(x+y)}+z &= x+z+2\sqrt{y(x+z)}+y \\ \sqrt{z(x+y)} &= \sqrt{y(x+z)} \\ zx+zy &= yx+zy \\ x(z-y) &= 0 \end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki:

1° $z-y=0$, skąd $z=y$ i mamy:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{2y}+\sqrt{x}=5 \end{cases}$$

jednak aby istniały rozwiązania y i $2y$ musiałyby być jednocześnie kwadratami liczb całkowitych, co jest oczywiście niemożliwe. (Aby liczba była kwadratem to każdy wykładnik w rozkładzie na czynniki pierwsze tej liczby musi być parzysty, a wykładniki przy liczbie 2 różnią się o jeden, zatem są różnej parzystości.) Zatem w tym przypadku nie ma rozwiązań.

2° $x=0$, wtedy otrzymujemy następujący układ:

$$\begin{cases} \sqrt{y}+\sqrt{z}=7 \\ \sqrt{y+z}=5 \end{cases}$$

zauważmy, że:

$$25=(\sqrt{y+z})^2=(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2-2\sqrt{yz}=49-2\sqrt{yz}$$

skąd otrzymujemy $\sqrt{yz}=12$. Podstawiając $p=\sqrt{y}, q=\sqrt{z}$ mamy:

$$\begin{cases} p+q=7 \\ pq=12 \end{cases}$$

Rozwiązując ten prosty układ otrzymujemy $(p,q)=(3,4),(4,3)$.

Zatem rozwiązania tego układu to: $(x,y,z)=(0,9,16),(0,16,9)$.

Sposób II: (A. Szwaja) Zauważmy, że $z,y\le 49$ oraz $x\le 25$ oraz każda z tych liczb musi być kwadratem liczby całkowitej. Stąd:

$$z,y\in\{0,4,9,16,25,36,49\} \qquad \text{oraz} \qquad x\in\{0,4,9,16,25\}$$

Ponadto liczby $x+y, x+z, y+z$ również muszą być kwadratami liczb całkowitych. Zatem co najmniej dwie z liczb x,y,z są parzyste. W przeciwnym wypadku biorąc dwie liczby nieparzyste, np. b. s. o. x oraz y mamy $x\equiv y\equiv 1$ modulo 4 (bo są to kwadraty liczb całkowitych, zatem nie mogą dawać reszty 3 modulo 4), ale wtedy $x + y \equiv 2$ modulo 4, a nie jest to reszta kwadratowa.

Teraz sprawdzając możliwe sumy dwóch elementów zbioru $\{4, 16, 36\}$ widzimy, że żadna nie jest kwadratem, zatem co najmniej jedna z liczb x, y, z jest zerem. Rozważmy przypadki:

1° Wszystkie liczby są równe 0, tj. $x = y = z = 0$. Jednak ta trójka nie jest rozwiązaniem układu.

2° Dwie liczby są równe 0. $x = y = 0$ implikuje $\sqrt{z} = 7$ z pierwszego równania oraz $\sqrt{z} = 5$ z trzeciego równania - sprzeczność. Podobnie dla $x = z = 0$ mamy $\sqrt{y} = 7 \neq 5 = \sqrt{y}$ oraz dla $y = z = 0$ mamy $\sqrt{x} = 7 \neq 5 = \sqrt{x}$.

3° Jedna liczba jest równa 0. Jeśli $x = 0$ to otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt{z} = 7 \\ \sqrt{y + z} = 5 \end{cases}$$

skąd $(x, y, z) = (0, 9, 16), (0, 16, 9)$. Z kolei jeśli $y = 0$ to otrzymujemy w szczególności:

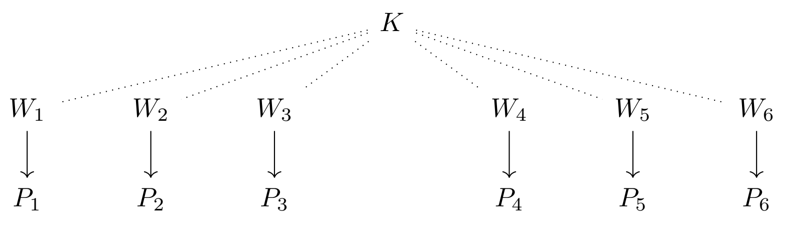
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{z} = 7 \\ \sqrt{x + z} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z + 2\sqrt{xz} = 49 \\ x + z = 49 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{xz} = 0$$

zatem któraś z liczb x, z jest również równa 0, co jest sprzeczne z założeniem. Analogicznie pokazujemy, że $z \neq 0$.

Jedyne rozwiązania tego układu to $(x, y, z) = (0, 9, 16), (0, 16, 9)$.

Zadanie 20

Zacznijmy od rozważenia zbiorów, w których znajduje się Kasia. Wtedy oczywiście nie znajduje się w nich żadna z jej córek. Dla każdej z sześciu jej wnuczek wybieramy albo tę wnuczkę (W_i), albo jej córkę (P_i), albo żadną z nich. Zatem dla każdej z sześciu wnuczek mamy 3 niezależne od siebie opcje wyboru, zatem jest ich łącznie $3^6 = 729$.



Zbiory z Kasią

Dla zbiorów, w których nie ma Kasi potraktujmy każdą z jej córek jako głowę jednej z parami rozłącznych rodzin. Dla każdej z córek możemy:

a) wybrać tę córkę i wnuczęta tej córki na 4 sposoby (W albo W' albo WW' albo nikt),

b) nie wybrać tej córki i wybrać któryś z dozwolonych $3^2 = 9$ zbiorów jej córek i wnuczek (zliczanie w sposób analogiczny do tego w akapicie zawierającym zbiory z Kasią).

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W \arrow[d] & & W' \arrow[d] \\ P & & P' \end{tikzcd}$$

Zatem dla każdej córki mamy $4 + 9 = 13$ różnych opcji, a ponieważ wybory dla każdej córki są od siebie niezależne to zbiorów bez Kasi jest $13^3 = 2197$. Zatem wszystkich takich zbiorów jest łącznie $729 + 2197 = 2926$.

Uwaga! Dla zbiorów bez Kasi 13 możliwości jednej „gałęzi rodziny” można zliczyć następująco: 1 zbiór zeroelementowy (pusty), 5 zbiorów jednoelementowych (poszczególne członkinie rodziny), $\binom{5}{2} - 4 = 6$ zbiorów dwuelementowych (wszystkie możliwe bez czterech par matka-córka, czyli $CW, CW', WP, W'P'$), 1 zbiór trójelementowy (CPP') oraz zero zbiorów o większej mocy (bo musiałaby się w nich znaleźć pary matka-córka).
Rozważmy drzewo genealogiczne Kasi jak na rysunku:

$$\begin{tikzcd} & & & K \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\ & C_1 \arrow[dl] \arrow[d] & & C_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ W_1 \arrow[d] & W_2 \arrow[d] & W_3 \arrow[d] & & W_4 \arrow[d] & W_5 \arrow[d] & W_6 \arrow[d] \\ P_1 & P_2 & P_3 & & P_4 & P_5 & P_6 \end{tikzcd}$$

Drzewo genealogiczne rodziny Kasi

Zadanie 21

Sposób I: Zauważmy, że:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

bo kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną. Zatem mnożąc obustronnie razy $x^2 - x + 1$ nie zmieniamy kierunku nierówności. Możemy zapisać:

$$\begin{aligned} x^2(x^2 - x + 1) + 1 &\geq (x + 1)(x^2 - x + 1) \\ x^4 - x^3 + x^2 + 1 &\geq x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 \\ x^4 - 2x^3 + x^2 &\geq 0 \\ x^2(x^2 - 2x + 1) &\geq 0 \\ x^2(x - 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny to iloczyn dwóch kwadratów liczb rzeczywistych również jest nieujemny.

Uwaga! Równanie można rozwiązać podobnie rozważając osobno przypadek $x = -1$ a następnie mnożąc dany ułamek przez $\frac{x+1}{x+1}$.